# Floyd算法与动态规划

Cu_OH_2

# Floyd算法简介

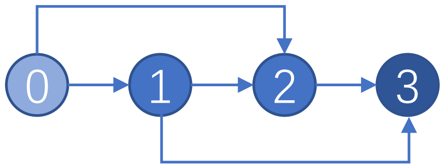
- 求解多源最短路问题
- 有/无向图，正/负边权
- 时间复杂度 $O(n^3)$，空间复杂度 $O(n^2)$

```
for (int k = 1; k <= n; ++k) {
    for (int i = 1; i <= n; ++i) {
        for (int j = 1; j <= n; ++j) {
            dis[i][j] = std::min(dis[i][j], dis[i][k] + dis[k][j]);
        }
    }
}
```

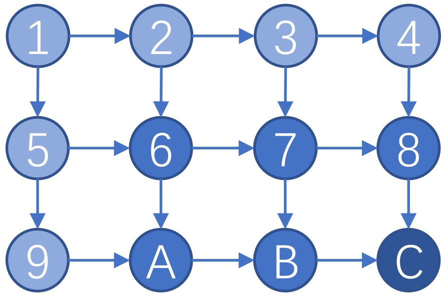
# 动态规划简介

1. 划分**子问题**，定义**状态**
2. 寻找状态间**转移关系**
3. 按**顺序**求解所有子问题

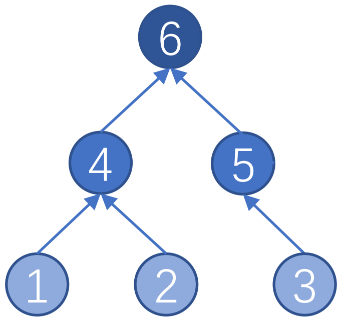
DAG（有向无环图）
- 线性
- 二维
- 树形
- …



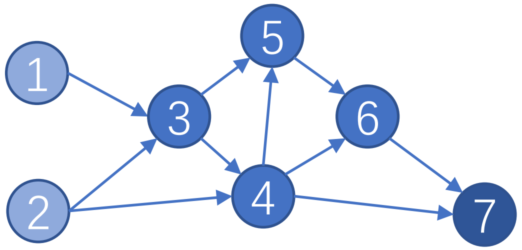

线性




二维




树形




一般DAG

# Floyd算法

## 1. 划分子问题，定义状态

- 总问题：对任意两个结点 i, j，求从 i 出发经过图中任意点到达 j 的最短路径长度

- 子问题 k：对任意两个结点 i, j，求从 i 出发只经过前 k 个结点 ($1 \le k \le n$) 中的点到达 j 的最短路径长度

- 状态 (k, i, j)：从 i 出发只经过前 k 个结点 ($0 \le k \le n$) 中的点到达 j 且路径最短

- 定义状态 (k, i, j) 的最短路径长度为 min_dist(k, i, j)

# Floyd算法

以 $n = 3$ 为例，状态分布如下

$$\begin{pmatrix} (0,1,1) & (0,1,2) & (0,1,3) \\ (0,2,1) & (0,2,2) & (0,2,3) \\ (0,3,1) & (0,3,2) & (0,3,3) \end{pmatrix}$$

初始状态集

$$\begin{pmatrix} (1,1,1) & (1,1,2) & (1,1,3) \\ (1,2,1) & (1,2,2) & (1,2,3) \\ (1,3,1) & (1,3,2) & (1,3,3) \end{pmatrix}$$

子问题1状态集

$$\begin{pmatrix} (2,1,1) & (2,1,2) & (2,1,3) \\ (2,2,1) & (2,2,2) & (2,2,3) \\ (2,3,1) & (2,3,2) & (2,3,3) \end{pmatrix}$$

子问题2状态集

$$\begin{pmatrix} (3,1,1) & (3,1,2) & (3,1,3) \\ (3,2,1) & (3,2,2) & (3,2,3) \\ (3,3,1) & (3,3,2) & (3,3,3) \end{pmatrix}$$

子问题3状态集
（总问题）

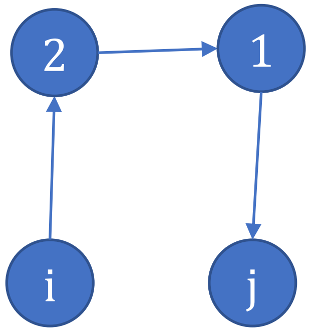
# Floyd算法

## 2. 寻找状态间转移关系

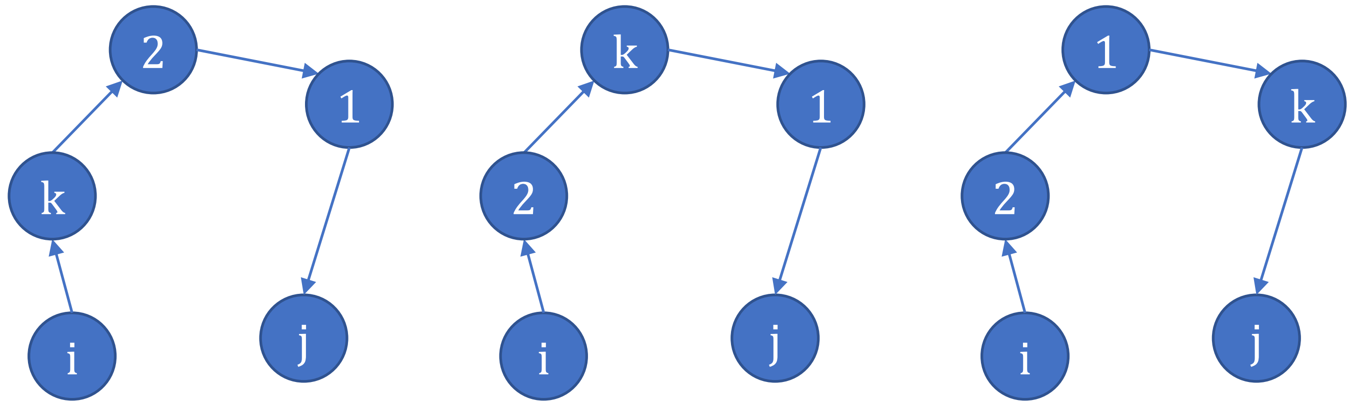
i.e. 寻找每个子问题与其子问题间的关系

- 子问题 k 如何由子问题 k – 1 构成?

- 考虑将结点 k 插入子问题 k – 1 所有最优路径中的任意两点之间，并与插入前路径取最优者

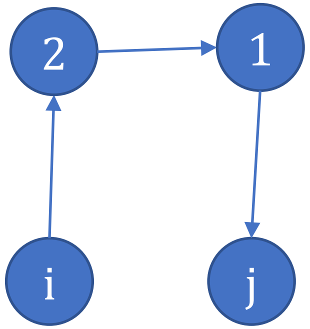



插入前（可能有多种）



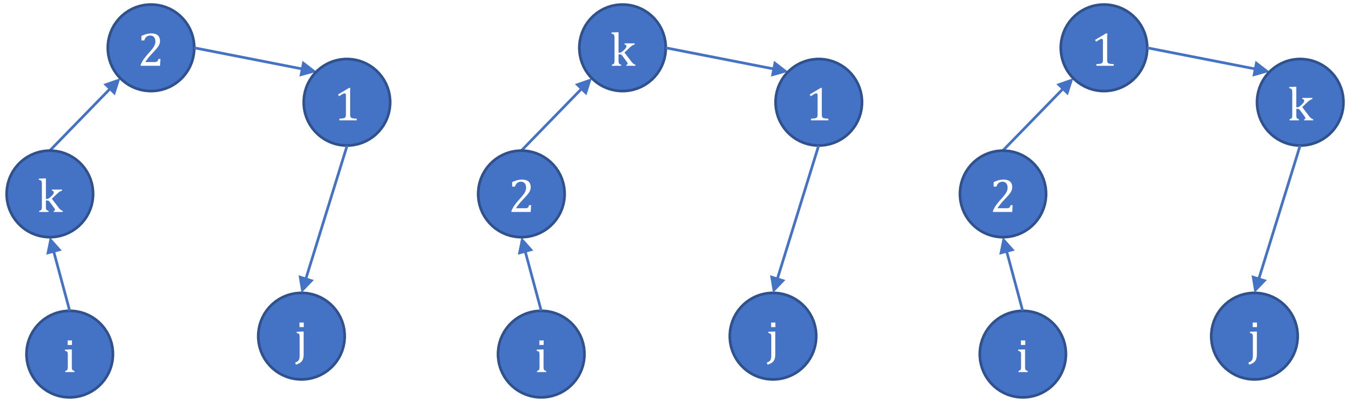

插入后

# Floyd算法




插入前（可能有多种）为

$min\_dis(k-1, i, j)$




插入后最短为

$min\_dis(k-1, i, k) + min\_dis(k-1, k, j)$

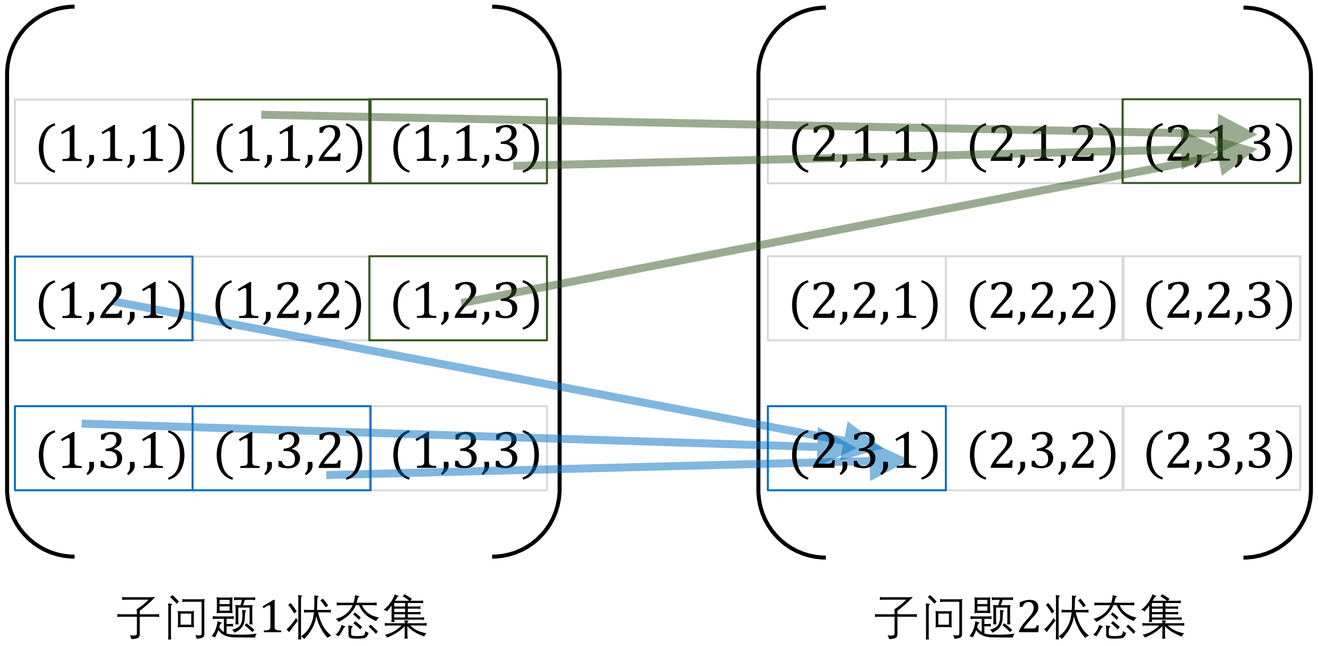
- 插入结点 k 后，i 与 k 之间、k 与 j 之间依然只经过前 k – 1 个结点中的点
- 实际上不用考虑所有插入后的情况，因为插入后的所有情况中一定包含 i, k 间距、k, j 间距都取到最小值的情况，所以插入后 i, j 最短距离一定为 $min\_dis(k-1, i, k) + min\_dis(k-1, k, j)$
- 将插入前后的结果取最小值即可构成新状态结果，状态转移方程为：

$$min\_dis(k, i, j) = min(min\_dis(k-1, i, j), min\_dis(k-1, i, k) + min\_dis(k-1, k, j))$$

# Floyd算法

以 $n = 3, k = 2$ 为例

考虑状态 $(2, 1, 3)$ 和 $(2, 3, 1)$ 时的转移关系如下




所有状态及状态间关系将形成一个DAG，可以按照拓扑序递推

# Floyd算法

## 3. 按顺序求解所有子问题

- 初始化：若 i 到 j 有边，则赋 dis[0][i][j] 为其中的最小边权；若 i 到 j 没有边，则赋 dis[0][i][j] 为一个极大的数（例如 0x3f3f3f3f ）代表正无穷。这个极大数既要足够大，达到正常距离之和无法达到的数量级；又要保证相加不会越界。

- 代码（C++）：

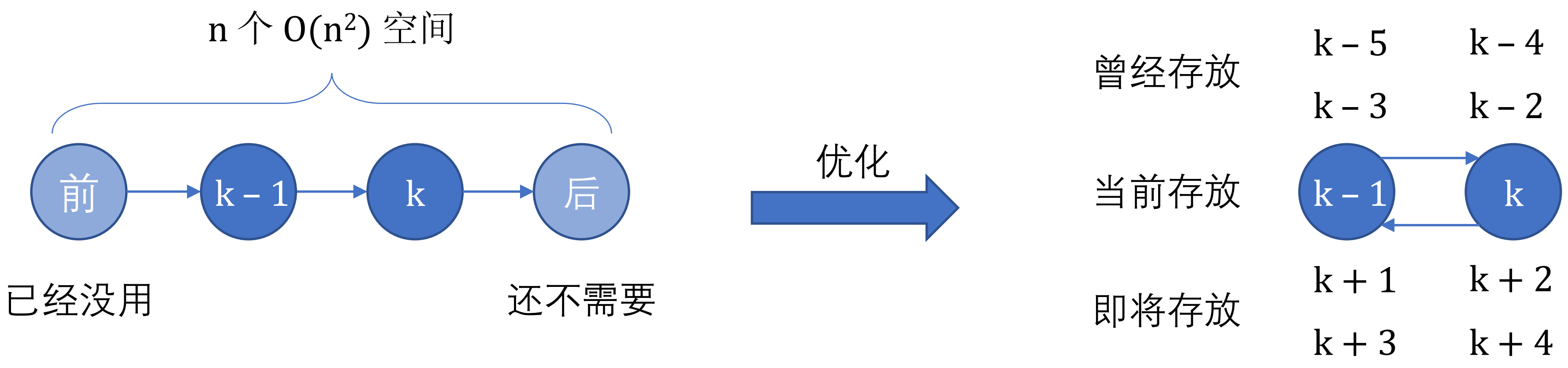
```cpp
for (int k = 1; k <= n; ++k) {
    for (int i = 1; i <= n; ++i) {
        for (int j = 1; j <= n; ++j) {
            dis[k][i][j] = std::min(dis[k - 1][i][j], dis[k - 1][i][k] + dis[k - 1][k][j]);
        }
    }
}
```

# 空间优化

## 动态规划的经典空间优化技巧：**滚动数组**

- 在状态转移时，**子问题 k 的状态只由子问题 k – 1 的状态转移而来**，因此递推过程中同一时刻内存中只需要存储两个子问题的状态，新状态信息可以直接覆盖旧状态信息。

- 此时已将空间复杂度优化至 $O(2\times n\times n) = O(n^2)$。

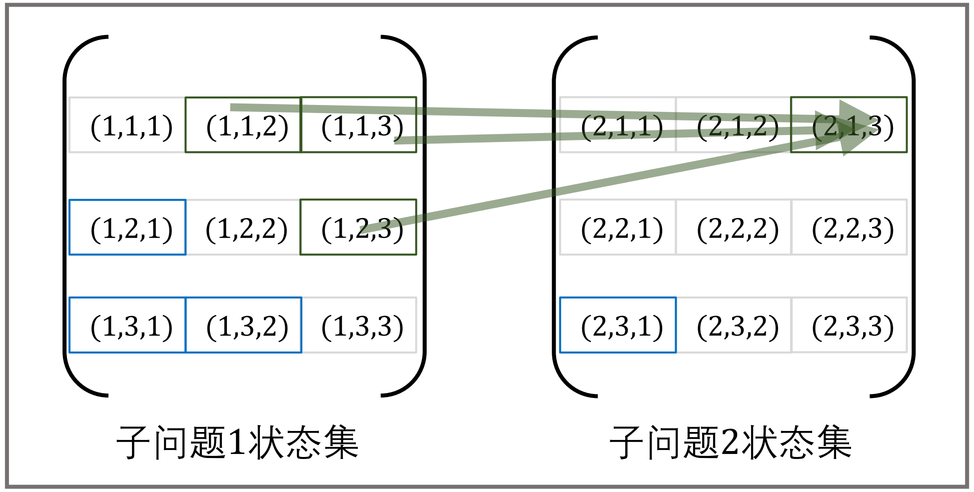


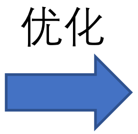
# 空间优化

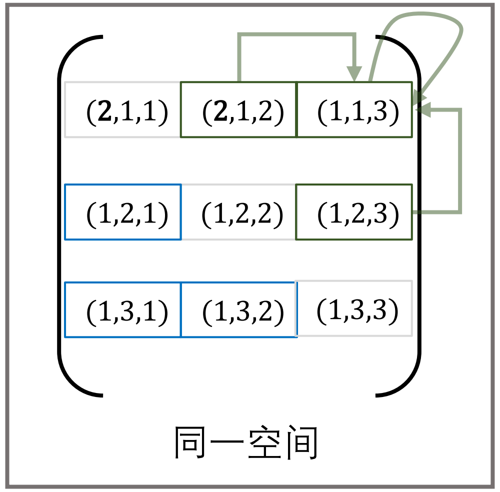
## 更进一步

继续考虑转移过程。

观察转移方程:




$$\text{min\_dis}(k, i, j) = \min(\text{min\_dis}(k-1, i, j), \text{min\_dis}(k-1, i, k) + \text{min\_dis}(k-1, k, j))$$

发现其实有:

$$\text{min\_dis}(k-1, i, k) = \text{min\_dis}(k, i, k)$$

$$\text{min\_dis}(k-1, k, j) = \text{min\_dis}(k, k, j)$$

也就是说在转移过程中，即使 $\text{min\_dis}(k-1, i, k)$ 或 $\text{min\_dis}(k-1, k, j)$ 已经被 $\text{min\_dis}(k, i, k)$ 或 $\text{min\_dis}(k, k, j)$ 覆盖， $\text{min\_dis}(k, i, j)$ 依然可以从同一位置取数值进行转移而不影响结果。

这意味着我们可以只用一个 $n^2$ 空间存储所有状态信息，在其内部直接进行转移，削去空间的第一维。

# 空间优化

```
dis[k][i][j] = std::min(dis[k - 1][i][j], dis[k - 1][i][k] + dis[k - 1][k][j]);
```

```
dis[(k % 2)][i][j] = std::min(dis[(k - 1) % 2][i][j], dis[(k - 1) % 2][i][k] + dis[(k - 1) % 2][k][j]);
```

```
dis[i][j] = std::min(dis[i][j], dis[i][k] + dis[k][j]);
```

# 可行性分析

## - 最优子结构（Bellman最优性原理）

- 母问题最优解一定包含子问题最优解，i.e. 子问题最优解一定能构成母问题最优解。

- 证：记 path(k, i, j) 为从 i 到j 只经过前 k 个点的最短路。若 path(k, i, j) 不经过 k，则等于 path(k – 1, i, j)；若经过 k，则一定可以拆分成 path(k – 1, i, k) 和 path(k – 1, k, j) 。所以只经过前 k 个点的最短路一定由只经过前 k – 1 个点的最短路构成。

## - 状态无后效性（Markov性质）

- 母问题的求解只与子问题的结果有关，与子问题结果的获得过程无关。

- 经过前 k 个点的最短路长度与只经过前 k-1/k-2/…/1 个点的最短路长度有关，无论前驱状态的最短路径形态如何，一定都可以用于转移，构成后继状态的最短路径，很显然符合无后效性特点。

# 谢谢观看

Cu_OH_2